PROGRAMME DE COLLE - SEMAINE N° 9: du 25/11/2024 au 29/11/2024

Connaissances minimales attendues

Chapitre 6 - Probabilités discrètes : révisions et compléments

Se reporter à un programme de colle précédent pour le début de ce chapitre.

Les items qui suivent sont relatifs à la partie du chapitre consacrée aux **chaînes de Markov**.

- Graphe fini orienté (rappel), Graphe fini orienté pondéré ;
- Graphe probabiliste ;
- Matrice de transition associée à un graphe probabiliste ;
- (HP) Matrice stochastique ;
- (HP) A propos des éléments propres d'une matrice stochastique : $\mathbf{1}$ est valeur propre et $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé, le spectre est inclus dans $[-1, 1]$;
- (HP) Le produit de deux matrices stochastiques est stochastique ;
- (HP) Lien entre matrice de transition d'un graphe probabiliste et stochasticité ;
- Chaîne de Markov associée à un graphe probabiliste, ensembles des états. Chaîne de Markov ;
- (HP) Trajectoire d'une chaîne de Markov ;
- Représentation matricielle de la loi de X_n (« état (probabiliste) de la chaîne de Markov $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$). Notation V_n (matrice ligne) ;
- Loi initiale (ou état (probabiliste) de la chaîne de Markov $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$) ;
- Relation de récurrence fondamentale vérifiée par la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Terme général de la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ impliquant les puissances de la matrice de transition ;
- Loi stationnaire (ou état (probabiliste) stable) d'une chaîne de Markov : définition et justification de la terminologie. Détermination de l'ensemble des lois stationnaires d'une chaîne de Markov sur des exemples ;
- La transposée de toute loi stationnaire est un vecteur propre de la transposée de la matrice de transition associée à la valeur propre $\mathbf{1}$ de cette matrice.
- (HP) Existence d'une loi stationnaire (ou état (probabiliste) stable) pour toute chaîne de Markov ;
- (HP) Une condition suffisante d'existence et d'unicité d'une loi stationnaire ;
- (HP) Suite de matrices lignes convergente.
- (HP) Chaîne de Markov convergente.
- (HP) Quelques conditions suffisantes de convergence d'une chaîne de Markov ;

- **(HP)** Lien entre chaîne de Markov convergente et loi stationnaire ;
- **(HP)** Panorama complet des comportements asymptotiques des chaînes de Markov associées à un graphe probabiliste d'ordre 2.

Chapitre 7 - Applications linéaires

- Définition d'une application linéaire de E dans F (où E et F sont deux espaces vectoriels réels).
Notation $\mathcal{L}(E, F)$;
- $f(0_E) = 0_F$ où E et F sont deux espaces vectoriels réels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$;
- Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, alors $X \mapsto AX$ est une application linéaire de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$;
- Si f est une application linéaire de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors il existe $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ tel que $f : X \mapsto AX$;
- Noyau d'une application linéaire f de E dans F . Notation $\ker(f)$;
- Noyau d'une matrice A . Notation $\ker(A)$.
- $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E (où $f \in \mathcal{L}(E, F)$)
- Caractérisation de l'injectivité d'une application linéaire à l'aide du noyau.
- Image d'une application linéaire f . Notation $\text{Im}(f)$;
- **(HP)** Image d'une matrice A . Notation $\text{Im}(A)$;
- $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F (où $f \in \mathcal{L}(E, F)$) ;
- Caractérisation de la surjectivité d'une application linéaire à l'aide de l'image ;
- Calcul pratique de l'image : si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base d'un espace vectoriel E et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ où F est un espace vectoriel, alors $\text{Im}(f) = \text{vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$;
- Structure d'espace vectoriel sur $\mathcal{L}(E, F)$ où E et F sont deux espaces vectoriels ;
- La composition de deux applications linéaires est linéaire ;
- Distributivité à droite et à gauche de la composition sur l'addition (dans $(\mathcal{L}(E), +, \cdot)$) ;
- Notation f^n (où $f \in \mathcal{L}(E, F)$) ;
- Caractère linéaire de la réciproque d'une application linéaire bijective ;
- Endomorphisme de E , isomorphisme de E sur F , automorphisme de E ;
- L'application $\Psi : E \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est un isomorphisme (où E est un espace vectoriel de dimension finie égale à n et $\mathcal{B}$ est une base de E) ;
$$u \longmapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$$
- Rang d'une application linéaire, notation $\text{rg}(f)$;
- **(HP)** Encadrement du rang ;
- Caractérisation de la surjectivité par le rang, en dimension finie ;

- Le théorème du rang : version « application linéaire » et version « matricielle » ;
- Caractérisation des isomorphismes (en dimension finie), caractérisation des automorphismes (en dimension finie).
- **(HP)** Deux conséquences du théorème du rang :
 - * Si f est un isomorphisme de E sur F , alors $\dim(E) = \dim(F)$;
 - * f est un isomorphisme de E sur F si et seulement si f « transforme » toute base de E en une base de F .

Savoir-faire et Méthodes à savoir appliquer

« Les incontournables »

- « Les incontournables » du programme de colle précédent sont toujours au programme.
- * Justifier qu'un graphe fini est un graphe probabiliste ;
- * Représenter graphiquement le graphe planaire probabiliste naturellement associé à une matrice stochastique ;
- * Représenter graphiquement le graphe planaire probabiliste naturellement associé à une chaîne de Markov ;
- * Expliciter la matrice de transition associée à un graphe probabiliste ;
- * Expliciter la matrice de transition associée à une chaîne de Markov.
- Donner quelques propriétés générales vérifiées par toute matrice de transition.
- Montrer, sur des exemples, la formule de récurrence vérifiée par la suite de matrices lignes $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (suite des états (probabilistes) de la chaîne de Markov) et montrer la formule donnant le terme général de cette suite.
- Déterminer l'ensemble des lois stationnaires d'une chaîne de Markov donnée et interpréter ;
- Mettre en évidence par le calcul la convergence d'une chaîne de Markov donnée et interpréter ;
- Montrer qu'une application d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F est linéaire ;
- Déterminer le noyau d'une application linéaire : l'écrire sous forme de **Vect**, déterminer une base et sa dimension (dans le cas où les espaces vectoriels mis en jeu sont des espaces vectoriels de dimension finie munis d'une base) ;
- Déterminer l'image d'une application linéaire : l'écrire sous forme de **Vect**, déterminer une base et sa dimension (dans le cas où les espaces vectoriels mis en jeu sont des espaces vectoriels de dimension finie munis d'une base) ;
- Montrer qu'une application d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F est un endomorphisme, un isomorphisme, un automorphisme.
- Appliquer le théorème du rang... :
 - * ... pour prévoir la dimension du noyau, connaissant celle de E et de l'image ;
 - * ... pour prévoir la dimension de l'image, connaissant celle de E et du noyau ;
 - * ... pour prévoir la dimension de E connaissant celle de l'image et du noyau
 - * ... pour montrer qu'une application linéaire injective ou surjective de E dans F avec E et F de même dimension finie est bijective.

Preuves exigibles

Propositions

1. Si X est une v.a. discrète à valeurs dans $\mathbb{Z}$, alors :
 - $\forall k \in \mathbb{Z}, \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \leq k) - \mathbb{P}(X \leq k - 1)$ [C+Ac] ;
 - $\forall k \in \mathbb{Z}, \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X > k - 1) - \mathbb{P}(X > k)$ [C+Ac] ;
2. (HP) Si X est une v.a. discrète finie vérifiant $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$, alors $E(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k)$ [C].
3. Espérance et variance de X où $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ [A] ;
4. Espérance et variance de X où $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ [A] ;
5. Espérance et variance de X où $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ [A] ;
6. Espérance et variance de X où $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ [A] ;
7. Si X compte le nombre de *Pile* après avoir lancé successivement n fois une pièce de monnaie amenant *Pile* à chaque lancer avec la probabilité p , alors X suit la loi binomiale de paramètres (n, p) (**Proposition 82**) [A] ;
8. Si X est égal au rang du premier *Pile* suite à une succession illimitée de lancers indépendants d'une pièce amenant *Pile* à chaque lancer avec la probabilité p , alors X suit la loi géométrique de paramètre p (**Proposition 84**) [A] ;
9. (HP) Fonction de répartition et d'antirépartition d'une v.a. suivant une loi géométrique [A] ;
10. (HP) 1 est valeur propre de toute matrice stochastique et $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé [A] ;
11. (HP) Le spectre de toute matrice stochastique est inclus dans $[-1, 1]$ [A] ;
12. (HP) Le produit de deux matrices stochastiques de même ordre est une matrice stochastique [A] ;
13. Relation de récurrence fondamentale vérifiée par la suite $(\mathbb{P}(X_n = 1) \dots \mathbb{P}(X_n = N))_{n \in \mathbb{N}}$ et terme général de cette suite [C] ;
14. (HP) Existence d'une loi stationnaire pour toute chaîne de Markov [A] ;
15. (HP) Si la chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, alors la limite de la suite de matrices lignes $(\mathbb{P}(X_n = 1) \dots \mathbb{P}(X_n = N))_{n \in \mathbb{N}}$ est une loi stationnaire de la chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ [A] .
16. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E et $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F [A] ;
17. Caractérisation de l'injectivité des applications linéaires à l'aide du noyau [C] ;
18. La composée de deux applications linéaires est linéaire [A] ;
19. La réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme [A] ;
20. Le théorème du rang [A] ;
21. Caractérisation des isomorphismes en dimension finie (à l'aide du théorème du rang) [C].

Exemples/ exercices

1. Exemple de variable aléatoire discrète ne possédant pas d'espérance [C].
2. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre 1. Existence et valeur de $E(3X + 1)$ et de $V(3X + 1)$ [C].
3. On tire successivement avec remise de manière illimitée dans une urne contenant n boules noires et b boules blanches. Déterminer la loi de la variable aléatoire Y égales au nombre de boules blanches obtenues avant la première boule noire [C].
4. Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{P}(1)$. Existence et valeur de $E\left(\frac{1}{X+1}\right)$ [C].
5. Calcul du moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale [C].
6. On effectue le tirage d'une poignée aléatoire de n boules dans une urne comportant N boules numérotées de 1 à N . Déterminer la loi de la variable aléatoire X égale au plus grand numéro présent dans la poignée aléatoire [TD].
7. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant chacune la loi $\mathcal{G}(p)$. Déterminer la probabilité que la matrice aléatoire $M = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 1 & Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable (preuve complète) [TD];
8. On suppose qu'un péage autoroutier comporte 10 guichets choisis au hasard et de manière indépendante par les automobilistes qui s'y présentent. On suppose que le nombre de voitures se présentant au péage pendant une heure donnée suit la loi de Poisson de paramètre 100. Déterminer la loi de la variable de la variable aléatoire X_1 égale au nombre de voitures se présentant au guichet numéro 1 pendant le même créneau horaire (preuve complète) [TD];
9. On dispose de deux pièces de monnaie numérotées respectivement 1 et 2.
 La pièce de monnaie numérotée 1 amène *Pile* à chaque lancer avec la probabilité $1/3$, *Face* avec la probabilité $2/3$.
 La pièce de monnaie numérotée 2 amène *Pile* à chaque lancer avec la probabilité $1/4$, *Face* avec la probabilité $3/4$.
 On effectue une succession illimitée de lancers selon le protocole suivant : la pièce utilisée pour à l'instant 0 est choisie au hasard entre les deux pièces et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si le lancer effectué à l'instant n amène *Face*, alors le lancer effectué à l'instant $n + 1$ s'effectue avec l'autre pièce.
 On suppose l'expérience aléatoire modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.
 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au numéro de la pièce utilisée à l'instant n .
 - Déterminer la loi initiale (ou état (probabiliste) initial) de la chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ [C].
 - Déterminer la matrice de transition et le graphe probabiliste associés à la chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ [C].
 - Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la puissance n ème de la matrice de transition M après l'avoir diagonalisée [C].
 - Déterminer la loi de X_n , pour tout $n \in \mathbb{N}$ [C].
 - Déterminer l'ensemble des lois stationnaires de la chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ [C].
 - Montrer que la chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et préciser la loi limite [C].
10. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $f: M \mapsto AM - MA$. Alors :

- f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ [C] ;
- détermination du noyau de f [C] ;
- détermination de l'image de f [C].

11. Soit f l'application qui à tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$ associe le polynôme $XP' - 2P$. Alors :

- f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ [C] ;
- détermination du noyau de f [C] ;
- détermination de l'image de f [C].

[A] : Annexe **Preuves** ;

[C] : Preuve traitée au tableau **en cours** ;

[Ac] : Annexe **Corrections**

[TD] : Travaux Dirigés

Informatique

Tout le contenu des polycopiés :

- **TP1 - Cours (rappels) et TP1 - Exercices**
- **TP2 - Algorithmique de listes (rappels)** [calcul du (second) minimum (et indices associés), (second) maximum (et indices associés), des valeurs les plus proches (et indices associés), recherche dichotomique dans une liste triée, algorithmes gloutons (« plus grand nombre », « déplacement d'une grenouille », rendu de monnaie, problème des conférenciers), algorithmes de tri (**HP**) (tri-bulles et tri-par-insertion)].
- **TP3 - Calculs numériques** [algorithme de dichotomie, méthode de point fixe, méthode de Newton-Raphson (**HP**), méthode des rectangles permettant le calcul approché d'une intégrale sur un segment(**HP**), application au calcul des valeurs approchées des valeurs prises par la fonction de répartition de toute variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ (**HP**)].
- **TP4 - Graphes (rappels)** [révision du vocabulaire et des théorèmes du programme, représentation d'un graphe avec Python (matrice numpy d'adjacence, liste des listes d'adjacence, dictionnaire), fonctions de conversion d'une représentation à une autre, divers exercices de manipulation de graphes (ordre, nombre d'arêtes, caractère adjacent de deux sommets, voisinage, degré, caractère isolé d'un sommet, caractère simple, complet, eulérien d'un graphe, calcul de nombre de chaînes reliant deux sommets donnés, calcul des distances combinatoires à un sommet dans un graphe simple, calcul de l'excentricité, du diamètre d'un graphe, algorithme de Dijkstra (calcul d'une chaîne de poids minimal)].

sont au programme de cette semaine (y compris toutes les extensions hors-programme (**HP**)).

On pourra proposer aux étudiants des questions de cours d'informatique et/ou des exercices, en s'inspirant très fortement des exercices présents dans les polycopiés susmentionnés.

Quelques remarques destinées aux colleurs

- La colle commencera par quelques questions de cours (restitution d'une définition, d'une proposition/théorème, d'une ou des méthodes de base) ;
- On pourra demander aux élèves de prouver un des théorèmes (de manière complète ou incomplète) répertoriés dans la rubrique **Preuves exigibles** et tester la compréhension des élèves à propos de ce qu'ils écrivent ;
- On évitera autant que possible de consacrer plus d'une demi-heure aux questions de cours ;
- Les exercices proposés devront être de niveau progressif ;
- Les exercices relatifs aux Chaînes de Markov proposés aux élèves seront de niveau modéré : l'objectif est de s'assurer que les élèves maîtrisent le vocabulaire et les réflexes de base, sur des exemples simples.
- On accordera un soin tout particulier à la rédaction et à la rigueur ;
- Toute erreur répertoriée dans le document Erreurs graves sera lourdement sanctionnée ;
- Si l'élève interrogé ne répond pas correctement aux questions de cours, on attribuera une note strictement inférieure à la moyenne, et ce indépendamment de la suite de l'interrogation orale.